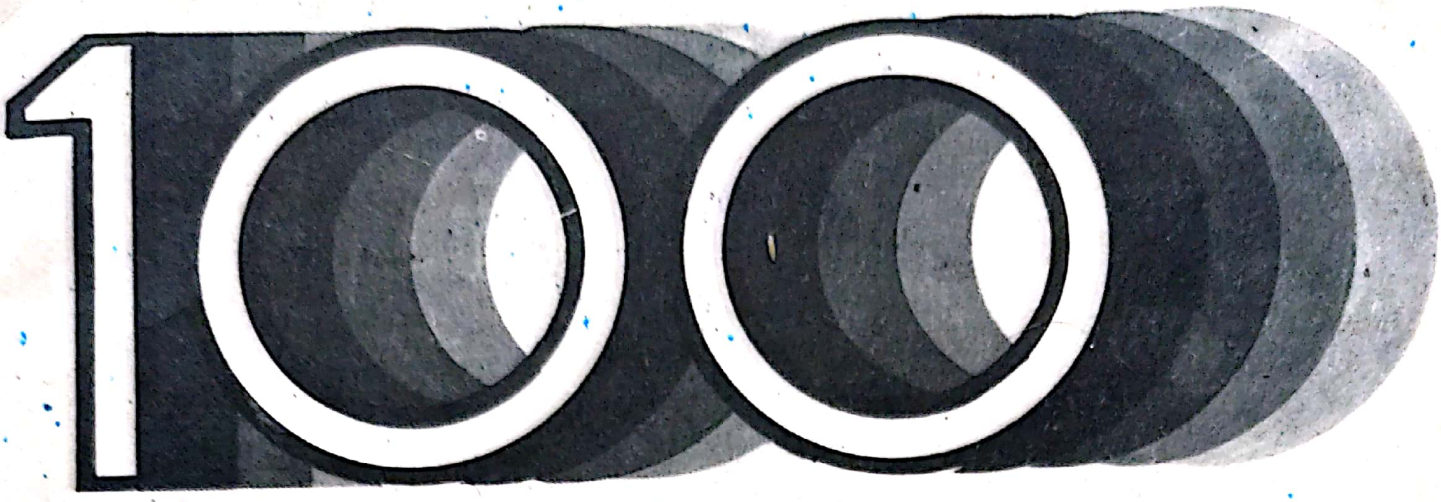
Cătălin-Petru Nicolescu



LECȚII DE MATEMATICĂ fără meditator

pentru pregătirea individuală
a elevilor din clasele IX—XII,
în vederea susținerii examenelor de admitere
în institutele de învățămînt superior.

Lecția 2

Scanned with OKEN Scanner

CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU

100 LECŢII DE MATEMATICĂ

• LECŢIA 2 •

EDITURA ICAR • BUCUREŞTI — 1990

Lecţia 2

STUDIUL FUNCŢIEI DE GRADUL DOI

partea — I

$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbf{R}.$

1° Relaţii între rădăcini şi coeficienţi:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{(1)} =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\underbrace{\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{(2)} =$$

$$= \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{(3)} = \underbrace{a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]}_{(4)}.$$

Identificînd (4) cu trinomul iniţial, adică aplicînd metoda coeficienţilor nedeterminaţi, obţinem:

$$\begin{cases} a = a \\ b = a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$ — numite *formulele lui F. Viète.*

Reamintesc: i) forma (1) se numeşte *forma canonică* a trinomului de gradul doi; forma (2) egalată cu zero va genera tocmai *formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul doi;* forma (3) se numeşte *descompunerea trinomului în factori ireductibili.*

ii) Metoda coeficienţilor nedeterminaţi:
două polinoame sînt identice dacă coeficienţii termenilor de acelaş grad sînt egali, dacă lipsesc termeni considerăm că există dar au coeficientul zero.

Observaţii: i) dacă $a > 0$ atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ şi adunînd $-\frac{\Delta}{4a}$ în ambii membri ai inecuaţiei obţinem $a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a} \geqslant$

$\geqslant -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$; deci numărul real $-\frac{\Delta}{4a}$ se numește *minimul funcției* f adică cea mai mică valoare, iar valoarea $x = -\frac{b}{2a}$ este cea în care se realizează acest minim.

ii) dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$ și adunînd $-\frac{\Delta}{4a}$ în ambii membri, obținem $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \leqslant -\frac{\Delta}{4a}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$; deci numărul real $-\frac{\Delta}{4a}$ se numește *maximul funcției* f adică cea mai mare valoare, iar valoarea $x = -\frac{b}{2a}$ este cea în care se realizează acest maxim. Condensînd aceste două afirmații putem spune că funcția de gradul doi admite un punct de extrem, de coordonate $x_E = -\frac{b}{2a}$, $y_E = -\frac{\Delta}{4a}$ (sau $y_E = f(x_E)$), iar forma sa este dată de semnul coeficientului lui x^2.

Cazuri particulare:

i) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$;

ii) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$,

iii) $S_k = x_1^k + x_2^k$, $k \in \mathbf{N}$, atunci $S_k = -\frac{bS_{k-1} + c \cdot S_{k-2}}{a}$, cu $S_0 = 2$ și $S_1 = -\frac{b}{a}$.

Demonstrație: Cum x_1, x_2 sînt rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$, atunci ele vor verifica ecuația, deci:

A. $\left\{\begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{array}\right| +$

$$a \cdot S_2 + b \cdot S + cS_0 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{b \cdot S + 2c}{a}.$$

Amplificînd în A. prima relație cu x_1 și a doua cu x_2, obținem:

B. $\left\{\begin{array}{l} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0 \end{array}\right| +$

$$a \cdot S_3 + bS_2 + cS = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{bS_2 + cS}{a}.$$

Amplificînd în B prima relație cu x_1 și pe a doua cu x_2, obținem

C. $\left\{\begin{array}{l} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 = 0 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 = 0 \end{array}\right| +$

$$a \cdot S_4 + b \cdot S_3 + cS_2 = 0 \Rightarrow S_4 = -\frac{b \cdot S_3 + cS_2}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Amplificînd în C prima relație cu x_1 și pe a doua cu x_2, și continuînd raționamentul obținem: $aS_k + bS_{k-1} + cS_{k-2} = 0$, determinînd astfel suma $S_k = x_1^k + x_2^k$ în funcție de toate sumele anterioare adică în final în funcție de coeficienții a, b, c,

iv) $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{S^2 - 4P}$.

Demonstrație: $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$.

v) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Demonstrație: $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = S + 2\sqrt{P}$.

vi) $\frac{1}{x_1^k} + \frac{1}{x_2^k} = \frac{x_1^k + x_2^k}{(x_1x_2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$. În calcule se va aplica punctul iii).

vii) $x_1 = k \cdot x_2$, $k \in \mathbb{R}$, atunci $P = \frac{k}{(1+k)^2} \cdot S^2$.

Demonstrație: asociem formulele lui F. Viète, iar între cele trei relații se vor elimina rădăcinile x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 = kx_2 \\ x_1x_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k}{1+k} \cdot S \\ x_2 = \frac{1}{1+k} \cdot S \end{cases} \Rightarrow P = \frac{k}{(1+k)^2} S^2.$$

viii) $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ atunci $P = \frac{(\gamma - \alpha S)(\beta S - \gamma)}{(\beta - \alpha)^2}$.

Demonstrație: asociem formulele lui F. Viète, iar între cele trei relații se vor elimina rădăcinile x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma \\ x_1x_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\gamma - \alpha S}{\beta - \alpha} \\ x_2 = \frac{\beta S - \gamma}{\beta - \alpha}. \end{cases}$$

2° Studiul semnului funcției de gradul doi:

i) dacă $\Delta > 0$, atunci $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ și $f(x)$ are semnul lui a în afara rădăcinilor și semn contrar lui a între rădăcini. Graficul asociat va intersecta axa absciselor în două puncte distincte x_1 și x_2.

ii) dacă $\Delta = 0$ atunci $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ și $f(x)$ are același semn ca și a pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Graficul asociat va fi tangent axei absciselor în punctul $x = -\frac{b}{2a}$.

iii) dacă $\Delta < 0$ atunci $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ și $f(x)$ are același semn ca și a pentru orice $x \in \mathbf{R}$ Deci

$$f(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0; \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Graficul asociat nu va intersecta axa absciselor.

3° Graficul funcției de gradul al doilea:

Moduri de lucru: a) Prin monotonia funcției:
i) Intersecția cu axele carteziene:

$$x = 0 \Rightarrow y = c$$

$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \text{ cu rădăcinile } x_1, x_2.$$

Observații: dacă $\Delta > 0$, parabola intersectează abscisa în două puncte distincte; dacă $\Delta = 0$, parabola este tangentă abscisei, dacă $\Delta < 0$, parabola nu intersectează abscisa.

ii) Determinarea coordonatelor punctului de extrem:

$$x_E = -\frac{b}{2a}, \quad y_E = -\frac{\Delta}{4a} = f(x_E).$$

Observație: prin punctul de extrem trece axa de simetrie a parabolei, care este o dreaptă paralelă cu Oy.

iii) Trasarea tabelului de variație:

$a > 0$

x	$-\infty$		x_E		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	y_E	$\nearrow$	$+\infty$

minim

$a < 0$

x	$-\infty$		x_E		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_E	$\searrow$	$-\infty$

maxim

iv) Trasarea graficului.

b) Prin puncte și translații:

i) Intersecția cu axele carteziene.

ii) Se aduce trinomul la forma canonică:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

iii) Se trasează prin puncte parabola de ecuație $y = ax^2$.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	$4a$	a	0	a	$4a$	...

iv) Se translatează parabola $y = ax^2$, pe axa Oy cu $y = -\frac{\Delta}{4a}$, obținând o parabolă cu ramurile paralele primei parabole, și de ecuație $y = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

v) Se translatează parabola $y = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$ pe o paralelă la Ox, dusă prin $y = -\frac{\Delta}{4a}$, cu $x + \frac{b}{2a} = 0$, adică $x = -\frac{b}{2a}$, obținînd o parabolă cu ramurile paralele primei parabole și de ecuație $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + bx + c$.

Exemplu: Să se traseze graficul funcției $y = x^2 - 3x + 2$.

a) „Prin monotonia funcției".

i) Intersecția cu axele carteziene:

$x = 0 \Rightarrow y = 2$.

$y = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

ii) Determinarea coordonatelor punctului de extrem:

$$x_E = -\frac{3}{2},\quad y_E = f(x_E) = -\frac{1}{4}.$$

iii) Trasarea tabloului de variație:

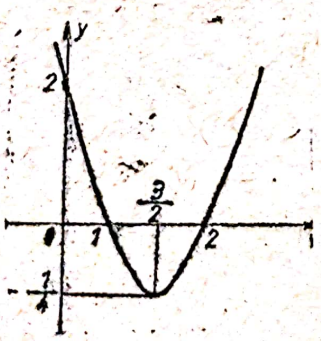


Fig. 2.1

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		∞
y	∞	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
							minim				

iv) Trasarea graficului: vezi fig. 2.1.

b) „Prin puncte și translații".

i) Intersecția cu axele carteziene:

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

ii) Se aduce trinomul la forma canonică:

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

iii) Se trasează prin puncte parabola de ecuație $y = x^2$.

x	$-\infty \ldots$	-2	-1	0	1	$2 \ldots$	$+\infty$
y	$+\infty \ldots$	4	0	1	1	$4 \ldots$	$+\infty$

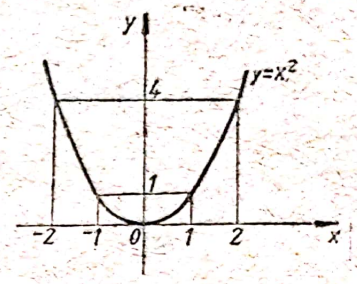


Fig. 2.2

iv) Se translatează parabola $y = x^2$, pe Oy cu $-\frac{1}{4}$, obținînd parabola de ecuație $y = x^2 - \frac{1}{4}$. Vezi fig. 2.3.

v) Se translatează parabola $y = x^2 - \frac{1}{4}$, pe o paralelă la Ox cu $x = \frac{3}{2}$, obținînd parabola $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, al cărui grafic este prezentat în fig. 2.4.

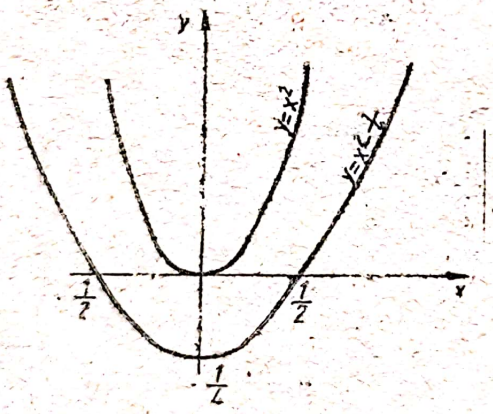


Fig. 2.3

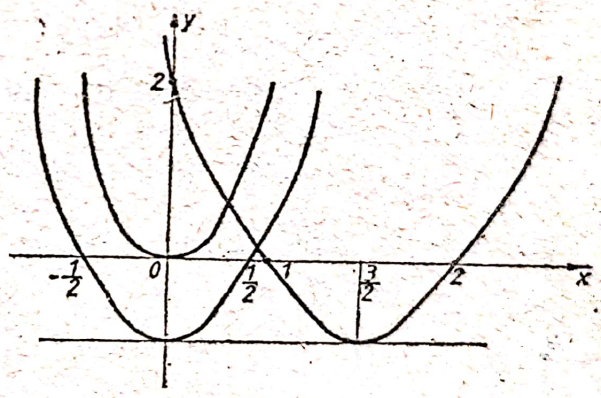


Fig. 2.4

4° Discuția ecuației de gradul al doilea cu ajutorul discriminantului, sumei și produsului (Δ, S, P).

Modul de lucru: i) Discuția semnului pentru $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$ cu ajutorul unor tabele de variație a semnelor.

ii) Se trasează axa reală pe care sînt trecute în mod ascendent rădăcinile ecuațiilor $\Delta = 0$, $S = 0$, $P = 0$.

iii) Formarea tabelului general de discuție al rădăcinilor x_1, x_2 în funcție de valorile unui parametru:

Parametrul	Δ	S	P	Discuția rădăcinilor

Observații:

a) $\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_1 \neq x_2$;

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_1 = x_2$;

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$.

b) Pentru $\Delta > 0$; $S > 0 \begin{cases} x_1 > 0,\ x_2 > 0 \text{ sau} \\ x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1 > |x_2|; \end{cases}$

$S < 0 \begin{cases} x_1 < 0,\ x_2 < 0 \text{ sau} \\ x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1 < |x_2|; \end{cases}$

$S = 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1 = |x_2|$.

c) Pentru $\Delta > 0$; $P > 0 \begin{cases} x_1 > 0,\ x_2 > 0 \text{ sau} \\ x_1 < 0\ \ x_2 < 0; \end{cases}$

$P < 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0$;

$P = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

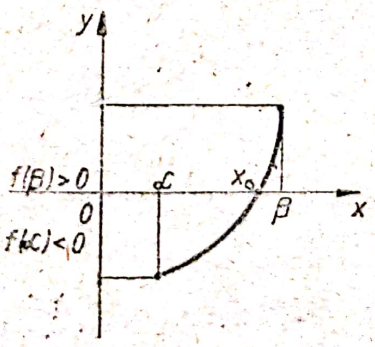
5° Relații între o rădăcină și capetele unui interval dat.

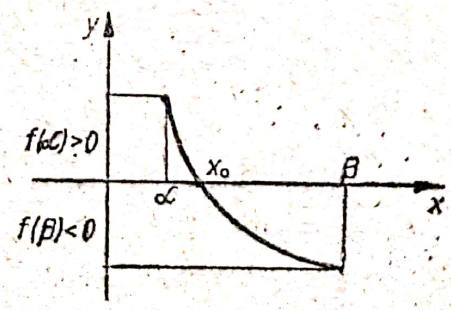
i) Dacă o funcție este continuă pe un interval $[\alpha, \beta]$, adică graficul său este neîntrerupt continuu, și dacă funcția ia valori de semne contrare la capetele intervalului, atunci funcția se anulează în cel puțin un punct cuprins în $[\alpha, \beta]$.

ii) Dacă o funcție este continuă pe un interval $[\alpha, \beta]$ și nu se anulează în nici un punct din interval, atunci funcția păstrează același semn pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Cele două afirmații se numesc *consecințe ale proprietății lui Darboux*. Deci

$x_0 \in (\alpha, \beta)$, x_0 este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Vezi graficele 2.5 și 2.6.





Exemplu: Să se determine valorile parametrului real m, astfel încît ecuația: $f(x) = 4mx^2 + (2m - 1)x + 3(m - 1) = 0$ să admită o rădăcină în intervalul $(-1, 1)$.

Rezolvare. Calculăm $f(-1) = 5m - 2$; $f(1) = 9m - 4$.

Cum $x_0 \in (-1, 1)$ atunci $f(-1) \cdot f(1) < 0$, adică $(5m - 2)(9m - 4) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}\right)$.

6° Relații între rădăcini și capetele unui interval (α, β) dat.

Se vor întîlni șapte tipuri de exerciții:

i) $x_1 < x_2 < \alpha$;

ii) $x_1 < \alpha < x_2$;

iii) $\alpha < x_1 < x_2$;

iv) $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$,

v) $x_1 < \alpha < \beta < x_2$;

vi) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$;

vii) $\alpha < x_1 < \beta < x_2$.

● Analizăm ultimele patru cazuri. Efectuăm o substituție de forma $\boxed{y = \frac{x - \beta}{x - \alpha}}$, adică $\boxed{x = \frac{\beta - \alpha y}{1 - y}}$. Cum $y_1 = \frac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha} \gtrless 0$ și $y_2 = \frac{x_2 - \beta}{x_2 - \alpha} \gtrless 0$ conform relației date în ipoteză, obținem:

$$S_y = y_1 + y_2 \gtrless 0 \text{ și } P_y = y_1 y_2 \gtrless 0.$$

Observație: dacă rădăcinile y_1 și y_2 sînt de semn contrar, atunci S_y va fi abandonată deoarece nu știm care dintre rădăcinile y_1, y_2 este mai mare în valoare absolută.

Substituind pe x în ecuația dată, obținem:

$$f(\alpha) \cdot y^2 - (2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c)y + f(\beta) = 0.$$

Determinarea mulțimii soluțiilor este:

$$\begin{cases} \Delta_x > 0 \\ S_y \lesseqgtr 0 \\ P_y \lesseqgtr 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0. \\ \dfrac{2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c}{f(\alpha)} \lesseqgtr 0 \\ \dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} \lesseqgtr 0. \end{cases}$$

Intersectînd mulțimile obținute, vom determina mulțimea soluțiilor parametrului.

● Analizăm primele trei cazuri. Efectuăm o substituție de forma $\boxed{y = x - \alpha}$, adică $\boxed{x = y + \alpha}$. Cum $y_1 = x_1 - \alpha \gtrless 0$ și $y_2 = x_2 - \alpha \gtrless 0$ conform relației date în ipoteză, obținem $S_y = y_1 + y_2 \gtrless 0$ și $P_y = y_1 y_2 \gtrless 0$. Procedeul continuă în mod analog cazului precedent.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Acest calcul ne conduce la următoarele rezultate:

i) dacă $x_1 < x_2 < \alpha$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ x_E < \alpha \end{cases}$

ii) dacă $x_1 < \alpha < x_2$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{cases}$

iii) dacă $\alpha < x_1 < x_2$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ x_E > 0 \end{cases}$

iv) dacă $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \\ x_E < \beta \end{cases}$

v) dacă $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$

vi) dacă $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < x_E < \beta \end{cases}$

vii) dacă $\alpha < x_1 < \beta < x_2$ atunci $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha)f(\beta) < 0 \\ x_E > \alpha \end{cases}$, unde $x_E = -\frac{b}{2a}$.

Exemplu: Fie ecuația $mx^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$.

Să se determine valorile parametrului real m astfel încît $1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 2$.

Demonstrație: $\Delta_x = (m-1)^2 - 4m(m-2) = -3m^2 + 6m + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Fie $y = \frac{x-2}{x-1}$, $y = \frac{x_1 - 2 < 0}{x_1 - 1 > 0} < 0$ și $y_2 = \frac{x_2 - 2 < 0}{x_1 - 1 > 0} < 0 \Rightarrow$

$S_y < 0$ și $P_y > 0$.

Cum $y = \frac{x-2}{x-1}$, efectuăm substituția $x = \frac{y-2}{y-1}$, iar ecuația devine $3(m-1)y^2 - (m-7)y + 7m - 4 = 0$ cu

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} \Delta_x > 0 \\ S_y = \dfrac{m-7}{3(m-1)} < 0 \\ P_y = \dfrac{7(m-4)}{3(m-1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) \\ m \in (1, 7) \\ m \in \left(-\infty, \dfrac{4}{7}\right) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Intersectînd cele trei mulțimi, obținem: $m \in \left(1, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Exemple: 1° Să se determine valorile parametrului real m, astfel încît între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației să existe relația:

i) $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$, $3x_1 - 4x_2 = 11$;

ii) $(14m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$; $3x_1x_2 = 2x_1 - x_2$.

Rezolvare: i) $\Delta = (2m-3)^2 \geqslant 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \\ x_1x_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4S+11}{7}, \quad x_2 = \dfrac{3S-11}{7} \\ P = \dfrac{(4S+11)(3S-11)}{49} \end{cases}$$

Substituind pe $S = -\dfrac{2m-1}{2}$ și $P = \dfrac{m-1}{2}$

obținem: $\dfrac{m-1}{2} = \dfrac{\left[4\left(-\dfrac{2m-1}{2}\right)+11\right]\left[3\left(\dfrac{2m-1}{2}\right)-11\right]}{49} \Rightarrow$

$$m - 1 = \frac{(4m-13)(6m-25)}{49} \Rightarrow m_1, m_2.$$

ii) $\Delta = m^2 - 14m + 1 \geqslant 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 7-4\sqrt{3}) \cup (7+4\sqrt{3}, \infty)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ 2x_1 - x_2 = 3P \\ x_1x_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{2S-3P}{3}, \quad x_1 = \dfrac{S-3P}{3} \text{ și} \\ P = \dfrac{(S-3P)(2S-3P)}{9}. \end{cases}$$

Substituind pe $S = \dfrac{2m}{14m-1}$ și $P = \dfrac{1}{14m-1}$ obținem valorile parametrului m.

2° Să se discute următoarele ecuații după valorile parametrului real m:

i) $mx^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$;

ii) $mx^2 + (2m+1)x + 3m - 1 = 0$.

Rezolvare: i) $\Delta = -(3m^2 - 6m - 1)$; iar $\Delta \geqslant 0$ pentru

$$m \in \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

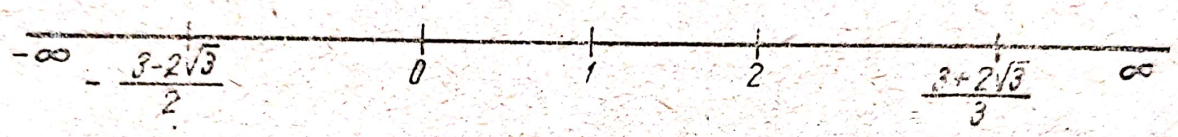
Scanned with OKEN Scanner

$S = \dfrac{1-m}{m}$

m	$-\infty$		0		1	∞
$1-m$	$+$	$+$	0	$-$		
m	$-$	0	$+$	$+$		
Semnul S	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$P = \dfrac{m-2}{m}$

m	$-\infty$		0		2	∞
$m-2$	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
m	$-$	0	$+$	$+$		
Semnul P	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	



Trasarea tabelului de discuție:

m	Δ	S	P	Discuția rădăcinilor
$m \in \left(-\infty, \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)$	$-$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$, rădăcini complexe conjugate
$m = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m \in \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	$+$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = 0$	$+$			Ecuația de gradul doi degenerează în ecuație de gradul întîi, $x-1=0$
$m \in (0, 1)$	$+$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 > \lvert x_2 \rvert$
$m = 1$	$+$	0	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ $x_1 = \lvert x_2 \rvert$
$m \in (1, 2)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < \lvert x_2 \rvert$
$m = 2$	$+$	$-$	0	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$
$m \in \left(2, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$	$+$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$	$-$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$, rădăcini complexe conjugate.

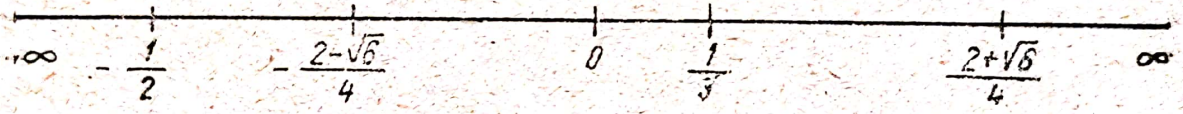
Scanned with OKEN Scanner

ii) $\Delta = -8m^2 + 8m + 1$; iar $\Delta \geq 0$ pentru $m \in \left[\frac{2-\sqrt{6}}{4}, \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

$$S = -\frac{2m+1}{m} \qquad P = \frac{3m-1}{m}$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		∞
$-(2m+1)$	$+$		0	$-$	$\|$	$-$	
m	$-$		$\|$	$-$	0	$+$	
Semnul S	$-$		0	$+$	$\|$	$-$	

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		∞
$3m-1$	$-$		$\|$	$-$	0	$-$	
m	$-$	0	$+$		$\|$	$+$	
Semnul P	$+$		$\|$	$-$	$\bullet$	$+$	



m	Δ	S	P	Discuția rădăcinilor ecuației
$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$, rădăcini complexe conjugate
$m = -\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$, complexe conjugate
$m \in \left(-1/2, \frac{2-\sqrt{6}}{4}\right)$	$-$	$+$	$+$	$x, x_2 \notin \mathbf{R}$, complexe conjugate
$m = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$	0	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{4}, 0\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = 0$	$+$			Ecuația de gradul doi degenerează în ecuația de gradul întîi $x - 1 = 0$
$m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < \lvert x_2 \rvert$
$m = \frac{1}{3}$	$+$	$-$	0	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 = 0$
$m \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right)$	$+$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1 \neq x_2$
$m = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$	0	$-$	$+$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}, \infty\right)$	$-$	$-$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbf{R}$, complexe conjugate

Scanned with OKEN Scanner

3° Să se determine valorile parametrului real m, astfel încît ecuația $(m-3)x^2-2(m-1)x+4m-3=0$ să admită o rădăcină și numai una între 2 și 3.

Rezolvare: Pentru ca acest eveniment să aibă loc trebuie ca $f(2)\cdot f(3)<0$, dar $f(2)=4m-11$, $f(3)=7m-24$; deci

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(2)\cdot f(3)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4(3m^2-13m+8)>0\\ (4m-11)(7m-24)<0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\in\left(\dfrac{13-\sqrt{73}}{6},\ \dfrac{13+\sqrt{73}}{6}\right)\\ m\in\left(\dfrac{11}{4},\ \dfrac{24}{7}\right)\end{cases}\Rightarrow m\in\left(\frac{11}{4},\ \frac{24}{7}\right).$$

4° Să se determine valorile parametrului real m astfel încît ecuația $mx^2-(m-4)x+3m-11=0$ să admită ambele rădăcini în intervalul $(0, 1)$.

Rezolvare: $\Delta_x=-11m^2+36m+16\geqslant 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\in\left[\frac{18-10\sqrt{5}}{11},\ \frac{18+10\sqrt{5}}{11}\right].$$

Fie $y=\dfrac{x-1}{x}$ cu $y_1=\dfrac{x_1-1}{x_1}<0$, $y_2=\dfrac{x_2-1}{x_2}<0\Rightarrow S_y=y_1+y_2<0$, $P_y=y_1\cdot y_2>0$. Cum $y=\dfrac{x-1}{x}$ atunci $x=\dfrac{1}{1-y}$ și substituind în ecuația inițială, obținem: $(3m-11)y^2-(5m-18)y+3m-7=0$.

$$\begin{cases}\Delta_x>0\\ S_y<0\\ P_y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_x>0\\ \dfrac{5m-18}{3m-11}<0\\ \dfrac{3m-7}{3m-11}>0\end{cases}\Rightarrow m\in\Phi.$$

5°. Să se determine valorile parametrului real m astfel încît $M\cap[5, 7]\neq 0$, unde $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2mx+4m+5=0\}$.

Rezolvare: Cum $M=\{x_1, x_2\}$ atunci pot să apară următoarele cazuri:

i) $x_1<5<x_2<7$, ii) $5<x_1<7<x_2$, iii) $5<x_1\leqslant x_2<7$,

iar $\Delta_x=4(m-5)(m+1)\geqslant 0\Rightarrow m\in(-\infty, -1]\cup[5, \infty)$.

i) Fie $y=\dfrac{x-7}{x-5}$ cu $y_1=\dfrac{x_1-7<0}{x_1-5<0}>0$, și $y_2=\dfrac{x_2-7<0}{x_2-5>0}<0$, deci $S_y=y_1+y_2$ nu o vom analiza deoarece nu știm care dintre numerele y_1, y_2 este mai mare în valoare absolută, iar $P_y<0$. Cum $y=\dfrac{x-7}{x-5}$ atunci $x=\dfrac{5y-7}{y-1}$, care valoare substituită în ecuația inițială va da: $3(m-5)y^2-$

$-8(m-5)y+5m-27=0$. Mulțimea soluțiilor parametrului se determină rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases}\Delta_x>0\\ P_y<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_x>0\\ \dfrac{5m-27}{3(m-5)}<0\end{cases}\Rightarrow m\in\Phi.$$

ii) Fie $y=\dfrac{x-7}{x-5}$ cu $y_1=\dfrac{x_1-7<0}{x_1-5>0}<0$ și $y_2=\dfrac{x_2-7>0}{x_2-5>0}>0$, iar S_x se abandonează și $P_y<0$, deci analog cazului i).

iii) Fie $y=\dfrac{x-7}{x-5}$ cu $y_1<0$, și $y_2<0$, iar $S_y<0$ și $P_y>0$. Mulțimea soluțiilor parametrului m o determinăm rezolvînd sistemul

$$\begin{cases}\Delta_x\geqslant 0\\ S_x<0\\ P_y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_x\geqslant 0\\ \dfrac{8(m-5)}{3(m-5)}<0\\ \dfrac{5m-27}{3(m-5)}>0\end{cases}\Rightarrow m\in\Phi.$$

Observație: Se putea efectua și substituția $y=\dfrac{x-5}{x-7}$ cu $x=\dfrac{7y-5}{y-1}$, care va genera ecuația $(5m-27)y-8\cdot(m-5)y+3(m-5)=0$ cu $S_y=\dfrac{8(m-5)}{5m-27}$ și $P_y=\dfrac{3(m-5)}{5m-27}$.

6°. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $2a\cos^2 x-m\cos x+a=0$, unde $a\in(0,\infty)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ admite rădăcini reale. Discuție.

Rezolvare. Pentru ca rădăcinile să fie reale trebuie ca $\Delta=m^2-8a^2\geqslant 0\Rightarrow m\notin[-2\sqrt{2}a,\ 2\sqrt{2}a]$, iar rădăcinile $\cos x\in[0,1]$ deoarece $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Cazul 1. Ecuația admite o singură rădăcină în $[0,1]$, atunci condiția este

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(0)\cdot f(1)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in\mathbf{R}\setminus[-2\sqrt{2}a,\ 2\sqrt{2}a]\\ a(3a-m)<0\end{cases}\Rightarrow m\in(3a,\ \infty).$$

Cazul 2. Ecuația admite ambele rădăcini în $[0,1]$. Condiția este

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(0)>0\\ f(1)<0\\ 0<x_{\text{extrem}}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in\mathbf{R}\setminus[-2\sqrt{2}a,\ 2\sqrt{2}a]\\ a>0\\ 3a-m>0\\ 0<\dfrac{m}{4a}<1\end{cases}\Rightarrow m\in(2\sqrt{2}a,\ 3a).$$

Scanned with OKEN Scanner

De fapt puteam să aplicăm și substituția: $\cos x = t \in [0, 1]$ deoarece $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; fie $y = \frac{t-1}{t-0}$ cu $y_1 = \frac{t_1 - 1}{t_1} < 0$, $y_2 = \frac{t_2 - 1}{t_2} < 0$ și $S_y < 0$, $P_y > 0$. Ecuația în t, $2at^2 - mt + a = 0$ cu $t = \frac{1}{1-y}$ devine $ay^2 + (m - 2a)y + 3a - m = 0$. Deci

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ S_y = -\frac{m-2a}{a} < 0 \\ P_y = \frac{3a-m}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ m > 2a \\ m < 3a \end{cases} \Rightarrow m \in (2\sqrt{2}a, 3a).$$

Tema 2

1°. Se dă ecuația $(m-3)x^2 + (m+3)x - m - 1 = 0$ cu m parametru real și rădăcinile x_1, x_2.

i) Să se determine valorile parametrului m astfel încît $4(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 - 1 = 0$.

ii) Să se discute natura rădăcinilor ecuației după valorile parametrului m.

2°. Se dă funcția $f: \mathbf{R} \to E$, $f(x) = x^2 + 2px + p^2 - 1$, $E \subset \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$.

i) Să se descompună în factori liniari, să se determine semnul funcției și mulțimea de valori.

ii) Dacă $p \geqslant 0$ să se demonstreze că funcția este strict monotonă pe $(-\infty, p-1)$.

iii) Să se arate că pentru $p = 1$ există relația $f(3\cdot 1) + f(3\cdot 2) + \ldots + f(3\cdot n) = \frac{3}{2} n(n+1)(2n+3)$, $n \in \mathbf{N}$.

3°. Se consideră ecuația $(m^2-1)x^2 - 2(m^2+2)x + m^2 - 4 = 0$, m parametru real.

i) Să se discute natura și semnul rădăcinilor.

ii) Să se determine m astfel încît ecuația să admită o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

iii) Să se determine m astfel încît ecuația să admită ambele rădăcini în intervalul $[-1, 1]$.

4°. Să se determine parametrul real m astfel încît $(m^2-1)x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 7 < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Se consideră ecuația în t: $t^2 + 2(2 - x)\,t + y + 3 = 0$, $x, y \in \mathbf{R}$. Considerînd punctul $M(x, y)$ din planul ortogonal xOy se cere:

i) mulțimea punctelor M pentru care ecuația dată admite o rădăcină egală cu -1.

ii) mulțimea punctelor M pentru care $|t_1 + t_2| = 2t_1t_2$, unde t_1, t_2 sînt rădăcinile ecuației în t.

iii) Mulțimea G a punctelor M pentru care ecuația dată are două rădăcini egale. Să se traseze graficul G.

iv) Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, analitic și grafic sistemul de ecuații $\sqrt{(2-x)^2} = y + 3$, $(2 - x)^2 = x + 3$.

v) Să se determine poziția punctului M în plan, astfel ca pentru orice $t \in \mathbf{R}$ să existe relația $f(3t) = 9 \cdot f(t - 1)$, unde $f(t) = t^2 + 2(2 - x)\,t + y + 3$.

vi) Să se împartă planul cartezian xOy în regiuni, după natura și semnul rădăcinilor ecuației date.

6°. Să se rezolve și să se discute ecuațiile:

i) $\sin 2x + \cos 3x = m \cdot \cos x$, m parametru real,

ii) $(m - 1)\sin^2 x - 2(m + 1)\sin x + 2m - 1 = 0$,

iii) $2m\,\mathrm{tg}^2 x - 2m\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

7°. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m astfel ca fiecare din ecuațiile

$$x^2 - (m^2 - 1)\,x + m^2 - 1 = 0$$

$$(m^2 - 3)\,x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$$

să aibă o singură rădăcină cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuații.

8°. Determinați condiția ca expresia $(a + bx)^2 + (a_1 + b_1x)^2$ să fie pătratul unei expresii liniare de gradul întîi în x. Arătați că dacă $(a + bx)^2 + (a_1 + b_1x)^2$ și $(a + cx)^2 + (a_1 + c_1x)^2$ sînt pătrate perfecte atunci și expresia $(b + cx^2) + (b_1 + c_1x)^2$ este un pătrat perfect.

Rezolvare: **1°.** i) Relația se mai poate scrie:

$$4(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$4\left(-\frac{m+3}{m-3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{m+1}{m-1} - 1 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 0\};$$

ii) $\Delta < 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{3}{5}, 1\right)$ rădăcini complexe conjugate;

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup [1, \infty)$ rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

2°. i) $f(x) = (x + p + 1)(x + p - 1)$;

$$\begin{cases} f(x) \leqslant 0 \text{ pentru } x \in [-p - 1, -p + 1] \\ f(x) > 0 \text{ pentru } x \in (-\infty, -p - 1) \cup (-p + 1, \infty). \end{cases}$$

$$E = (-1, +\infty) \text{ cu } y_E = -\frac{\Delta}{4a} = -1.$$

ii) $f(x) = (x + p)^2 - 1$; $f(x)$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, -p - 1)$.

iii) Calculăm $\sum_{k=1}^{n} f(3k) = \sum_{k=1}^{n} (9k^2 + 6k) = 9\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k =$

$$= 9 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)(2n+3)}{2}.$$

3°. i) $\Delta = 9m^2$, $S = \frac{2(m^2+2)}{m^2-1}$, $P = \frac{m^2-4}{m^2-1}$

m	Δ	S	P	Discuția rădăcinilor ecuației
$m \in (-\infty, -2)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = -2$	+	+	0	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 = 0$
$m \in (-2, -1)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < \lvert x_2 \rvert$
$m = -1$	+			Ecuația degenerează în ecuație de gradul I, $x = -\frac{1}{2}$
$m \in (-1, 0)$	+	−	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = 0$	0	−	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in (0, 1)$	+	−	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = 1$	+			Ecuația degenerează în ecuația de gradul I, $x = -\frac{1}{2}$
$m \in (1, 2)$	+	+	−	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < \lvert x_2 \rvert$
$m = 2$	+	+	0	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 = 0$
$m \in (2, \infty)$	+	+	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

Scanned with OKEN Scanner

ii) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1)\cdot f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

iii) Efectuăm substituția $y = \frac{x-1}{x-(-1)} = \frac{x-1}{x+1}$ cu $y_1 = \frac{x_1 - 1 < 0}{x_1 + 1 > 0} < 0$;

$y_2 = \frac{x_2 - 1 < 0}{x_2 + 1 > 0} < 0$ deoarece $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, iar $S_y < 0$, $P_y > 0$ și $x = \frac{1+y}{1-y}$. Deci ecuația devine:

$$(m^2-1)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2 - 2(m^2+2)\cdot\frac{1+y}{1-y} + m^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (4m^2-1)y^2 + 6y - 9 = 0$. Deci mulțimea parametrului m se determină rezolvînd sistemul de inecuații

$$\begin{cases} \Delta_x \geqslant 0 \\ S_y < 0 \\ P_y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9m^2 \geqslant 0 \\ -\frac{6}{4m^2-1} < 0 \\ -\frac{9}{4m^2-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \Phi.$$

4°. $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4m^2-1) < 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sau $|m| < \frac{1}{2}$.

5°. i) $f(-1) = 0 \Rightarrow y = -2x$, adică o dreaptă care trece prin originea axelor.

ii) $|t_1 + t_2| = 2t_1t_2 \Rightarrow |x-2| = y + 3 \Rightarrow$

$y = x - 5$ pentru $x \in [2, \infty)$ sau

$y = -x - 1$ pentru $x \in (-\infty, 2)$, adică două semidrepte.

iii) $\Delta = x^2 - 4x + 1 - y = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 1$ care reprezintă ecuația unei parabole cu vîrful $(2, -3)$ ca punct de minim.

iv) $\begin{cases} 2 - x = y + 3 & \text{pentru } x \in (-\infty, 2) \\ (2-x)^2 = x + 3 \quad \text{cu} & x = \frac{5-\sqrt{21}}{2},\ y = -\frac{7-\sqrt{21}}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 = y + 3 & \text{pentru } x \in (2, \infty) \\ (2-x)^2 = x + 3 \quad \text{cu} & x = \frac{5+\sqrt{21}}{2},\ y = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$

Grafic se vor reprezenta dreptele:

pentru primul sistem: $\begin{cases} y = -x - 1 \\ x = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

pentru al doilea sistem: $\begin{cases} y = x - 5 \\ x = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

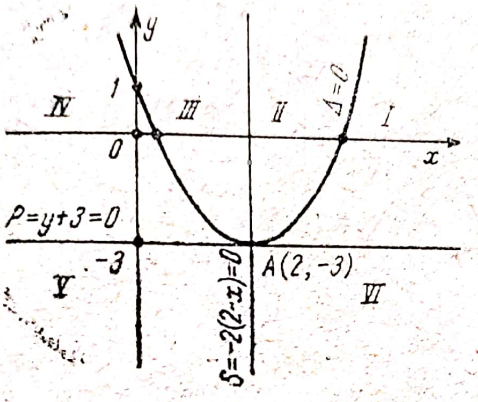
v) $f(3t) = 9f(t-1) \Rightarrow 6t(1-2x) + 18x + 8y - 3 = 0$

pentru orice $t \in \mathbf{R} \Rightarrow 1 - 2x = 0,\ 18x + 8y - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{3}{4} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right).$$

vi) $\Delta = x^2 - 4x + 1 - y,\ S = -2(2-x),\ P = y + 3.$

Reprezentăm în sistemul cartezian xOy, ecuațiile $\Delta = 0,\ S = 0,\ P = 0$. Vezi fig. 2.7.



Regiunea din plan	Δ	S	P	Discuția rădăcinilor
I	+	+	+	Două rădăcini reale pozitive
II	−	+	+	Două rădăcini complexe conjugate
III	−	+	−	Două rădăcini complexe conjugate
IV	+	+	−	Două rădăcini reale $t_1 > 0,\ t_2 < 0$
V	+	−	−	Două rădăcini reale $t_1 > 0,\ t_2 < 0$
VI	+	−	+	Două rădăcini reale $t_1 > 0,\ t_2 < 0$
$y = x^2 - 4x + 1,\ x > 2$	0	+	+	$t_1 = t_2 > 0$
$y = x^2 - 4x + 1,\ x < 2$	0	+	−	$t_1 = t_2 < 0$
$x = 2,\ y > -3$	−	+	0	$t_1 = -t_2$ rădăcini complexe
$x = 2,\ y < -3$	+	−	0	$t_1 = -t_2$ rădăcini reale
$y = -3,\ x > 2$	+	0	+	$t_1 = 0,\ t_2 > 0$
$y = -3,\ x < 2$	+	0	−	$t_1 = 0,\ t_2 < 0$
$x = 2,\ y = -3$	0	0	0	$t_1 = t_2 = 0$

Scanned with OKEN Scanner

6°. i) Transformînd pe $\sin 2x$ și $\cos 3x$ în argument simplu, obținem ecuația:

$$\cos x(4\sin^2 x - 2\sin x + m - 1) = 0;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \quad \text{și}$$

pentru factorul al doilea efectuăm substituția $\sin x = y \in [-1, 1]$ obținînd:

a) $f(y) = 4y^2 - 2y + m - 1 = 0$ cu $-1 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant 1$.

Efectuînd substituția $z = \dfrac{y-1}{y+1}$ cu $z_1 < 0$, $z_2 < 0$, $S_z < 0$, $P_z > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m \in \Phi$.

b) $f(y) = 0$ are o singură rădăcină în $[-1, 1]$ dacă

$$f(-1) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow m \in (-5, -1).$$

ii) Fie $\sin x = y \in [-1, 1]$, deci ecuația în y, $f(y) = (m-1)y^2 - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$ trebuie să aibă rădăcini reale și cuprinse în $[-1, 1]$.

Condiția de realitate este $-m(m-5) \geqslant 0 \Rightarrow m \in (0, 5)$; $f(-1)\, f(1) = 5m(m-4)$.

a) dacă $f(-1)\, f(1) < 0 \Rightarrow m \in (0, 4)$ ecuația are o singură rădăcină cuprinsă în $[-1, 1]$ — dacă $m \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ o soluție negativă;

— dacă $m \in \left(\dfrac{1}{2}\ \ 1\right)$ o soluție pozitivă;

— dacă $m \in (1, 4)$ o soluție pozitivă.

b) dacă $m \in (4, 5)$ ecuația nu are soluții.

iii) Cum $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ atunci $t = \operatorname{tg} x \in [0, 1]$. Deci ecuația în t, $f(t) = 2mt^2 - 2mt + 1 = 0$ poate avea o singură rădăcină în intervalul $[0, 1]$ dacă $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geqslant 0 \\ 1 \cdot 1 < 0 \end{cases}$ ceea ce este fals.

Ecuația în t poate admite ambele rădăcini în $[0, 1]$ dacă:

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geqslant 0 \\ 1 > 0 \\ 1 > 0 \\ 0 < \dfrac{1}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

7°. Fie x_1, x_2 rădăcinile primei ecuații și $f(x) = (m^2 - 3)\,x^2 - 6x - m^2 + 1$. Condiția este ca $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \Rightarrow [(m^2 - 3)\,x_1^2 - 6x_1 - m^2 + 1] \cdot [(m^2 - 3)x_2^2 - 6x_2 - m^2 + 1] < 0$. Efectuînd calculele și aplicînd formulele lui F. Viète pentru prima ecuație obținem:

$$-(m^2 - 1)\,(2m^2 - 11)\,(3m^2 + 1) < 0 \Rightarrow$$

$$m \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{11}{2}}\right) \cup (-1, 1) \cup \left(\sqrt{\frac{11}{2}}, \infty\right).$$

8°. Expresia dată se mai poate scrie: $(b^2 + b_1^2)x^2 + 2(ab + a_1b_1)\,x + a^2 + a_1^2$, iar pentru a fi un pătrat perfect trebuie ca $\Delta = 0$. Reducînd termenii asemenea obținem $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ (1). Dacă a doua expresie este un pătrat perfect atunci $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$ (2). Din (1) și (2) obținem că $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ ceea ce arată că și a treia expresie este un pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

Scopul prezentului ciclu alcătuit din 100 lecţii de matematică, (80 de lecţii aferente capitolelor materiei claselor IX—XII din care 16 lecţii conţin în partea finală şi un test recapitulativ, inserat în scopul de a verifica aprofundarea materiei studiate pînă în acel moment, iar ultimele 20 de lecţii conţinînd cîte un test final) este de a ajuta elevul claselor liceale să înţeleagă cît mai bine fenomenele matematice prezentate în manualele şcolare, astfel încît, după parcurgerea acestui ciclu de lecţii, viitorul candidat la examenele de admitere în învăţămîntul superior să aibă dezvoltată atît gîndirea abstractă cît şi perspicacitatea, putînd face faţă în condiţii optime, exigenţelor tot mai mari, proporţionale cu nivelele de dezvoltare a societăţii.

Prin marea varietate de tipuri de probleme, prin numărul lor (aproximativ 5 000), cît şi prin rezolvarea lor completă, elevul studios şi disciplinat matematic va putea acoperi întreaga materie necesară examenelor, eliminînd astfel eventualele lacune acumulate în anii anteriori şcolari.

Este de remarcat că cele 20 de teste finale, considerate în parte ca un pseudoexamen, vor putea fi lucrate, fiecare, în aproximativ 3 ore (astfel că elevul îşi va putea verifica resursele interne ale cunoaşterii matematice), adică timpul afectat candidaţilor la concursurile de admitere.

Ca un model de studiu, recomand viitorului candidat, să lucreze săptămînal cîte două lecţii în perioada cuprinsă între 15.IX şi 15.VI a anului următor, iar în ultima lună cîte un test final, zilnic.

Succesul la examene poate fi garantat numai printr-o muncă susţinută de cel puţin 3 ore zilnic, timp de 10 luni.

Comparat cu marea satisfacţie a reuşitei, sacrificiul nu mi se pare prea mare.

Nu uitaţi că o gîndire matematică înseamnă dezvoltarea inteligenţei, a perspicacităţii, a perceperii abstracte, a atenţiei distributive.

Nu toţi elevii claselor liceale pot beneficia de ajutor suplimentar din partea părinţilor sau a meditatorilor, de aceea, lucrarea de faţă îşi propune să înlocuiască această lipsă de ajutor şi să contribuie la autopregătirea elevului ce parcurge sistematic şi cu răbdare cele 100 de lecţii care vor deschide „apetitul matematic", determinînd pe rezolvitor să gîndească cît mai profund şi poate, de ce nu, să creeze şi el noi probleme de matematică.

De reţinut că celé „100 DE LECŢII DE MATEMATICĂ" urmăresc un singur lucru: **să asigure succesul candidaţilor la susţinerea examenelor de admitere într-un institut de învăţămînt superior.**

Academician
Constantin Drâmba

EDITURA ICAR-BUCUREŞTI
B-dul Bucureştii Noi nr. 68, sc. F, et. 3,
ap. 10, sector 1, cod 78494
Telefon: 67.12.88, 60.15.75

Lei 23

Scanned with OKEN Scanner